Situación 5

Leemos el artículo del diario El País, de España, del 7 de agosto de 1991. Viejo, pero interesante al fin.

Demostrado el teorema de las esferas de Kepler 380 años después

Los Ángeles. El matemático Wu-Yi Hsiang, de la Universidad de Berkeley (EEUU), ha dado la razón a Johannes Kepler y, curiosamente, a los fruteros, al demostrar un teorema que ha intrigado a los científicos durante 380 años. El problema, planteado por Kepler en 1611, es cómo colocar objetos redondos en una caja cuadrada de forma que quepan más. Los fruteros saben intuitivamente que la mejor forma de empaquetar naranjas, por ejemplo, es colocar pisos de frutos de manera que cada uno se apoye en tres de la capa inferior.

Keppler afirmó que ésta es la mejor disposición de objetos redondos para llenar una mayor densidad de una caja, pero ni él ni los matemáticos habían logrado demostrarlo.

La respuesta que acaba de publicar Wu-Yi Hsiang tiene implicaciones profundas ya que el simple problema del embalaje demuestra un teorema que rige cuestiones del comportamiento de la materia, desde la forma hexagonal de los copos de nieve hasta la cristalización de materiales. ...

Keppler, que entró en la historia de la ciencia al formular las leyes del movimiento de los planetas, calculó que al llenar de bolas una caja, si se coloca cada nueva esfera encima de una sola de la capa inferior, se ocupa el 60% del recipiente, pero si se van poniendo las bolas en los huecos que quedan entre cada tres esferas del piso de abajo, se logra llenar el 74,4% del espacio. Lo difícil era probar matemáticamente que la segunda disposición es la más eficaz posible.

Para hallar la demostración definitiva, (..)Hsiang ha investigado profundamente en geometría esférica, y ha trabajado sin ordenadores, «son muy rápidos, pero las ideas básicas proceden de las personas», ha dicho.

¿Qué cosa no había podido demostrar Kepler? ....
....
¿A qué se refiere cuando dice que se ocupa el 60% del recipiente? ....
¿Con qué se ocupa el 40% restante? ....
¿Qué porcentaje de más se logra llenar cuando se acomodan las esferas entre tres del piso inferior?

Supongamos que en un cajón acomodamos 45 naranjas colocándolas encima de una sola de la capa inferior, ¿cuántas se podrían poner si las ordenás según aconsejó Kepler?

¿Por qué nos detenemos en esto aquí? Allá por el capítulo 1 realizamos una clasificación de los elementos de la geometría en tres grupos:

•Los que sólo tienen largo (longitud): los segmentos, como parte de una recta, y con ellos calculamos perímetros.

•Los que tienen largo y ancho: las figuras, como parte de un plano y a ellos además les podemos calcular la medida de su superficie: el área.

•Los que tienen largo, ancho y profundidad: los cuerpos, como parte del espacio. Por supuesto que a éstos les hemos sacado perímetros y áreas, pero por lo visto, también podremos calcularles su contenido.

El contenido o capacidad es una magnitud propia de los cuerpos, pues la capacidad es la magnitud del interior de un recipiente. Pero esta magnitud tiene íntima relación con el recipiente, con **el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio**, entonces estamos hablando del **volumen**.

Pero, como leemos en el artículo, parece que los objetos "redondos" no son la unidad más eficiente para "rellenar" un cajón ocupando todo su espacio. ¿Cuál sería la forma que debería tener el cuerpo utilizado como unidad de volumen? ¿Por qué? ....

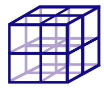
Cuando la luz del sol da en las paredes, se ponen a vibrar las partículas más pesadas que transportan el color y que flotan en la pintura. Sin embargo, como la pintura que parece cubrir las paredes en realidad es una ilusión óptica –ya que existen grandes huecos entre las partículas metálicas, que no son visibles debido a la limitación del aparato ocular humano–, la mayor parte de la luz llega hasta el material que hay debajo, ya sea ladrillo, madera, hormigón o cualquier otro. Esto dilata el material, tira de él verticalmente, y también tira de todos los clavos y tornillos de la pared. Como la parte superior del techo también se eleva a causa de la luz solar, el resultado final es que en la casa en conjunto comienza a expandirse. En el momento en que las personas regresen a la casa ésta será varios centímetros cúbicos más grande, un añadido sólido que se conservará hasta la caída de la noche, momento en que se desvanecen todos estos centímetros de más ganados durante el día gracias a la acción del sol.

D. Bodanis

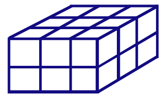
P 31

A ver si nos entendemos.

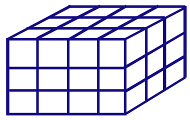
El siguiente cuerpo se construye con 8 dados juntos



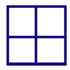
1) ¿Cuántos dados formarán el siguiente?..........



2) Y si juntamos dados de esta manera, sin dejar agujeros dentro, ¿cuál es su volumen? ....



3) Desarmemos el último bloque, ¿qué altura tendrá un prisma formado con todos los dados si tiene la siguiente base?..................



4) ¿Cuál es el área en cuadraditos del prisma de la segunda pregunta?............

5) ¿Cuál es el área del prisma de la tercera pregunta? ....

P 32

Para seguir razonando:

•Si utilizás toda una barra de plastilina, ¿se puede hacer un cubo? . ¿una esfera? .... ¿un prisma? .... ¿qué otra cosa se te ocurre? ....

¿Todos tendrán el mismo volumen? ¿Por qué? ....

•Con tu imaginación construí lo que te guste con un volumen de 24 ladrillitos de juguete (podés hacerlo de verdad).

Ahora construí un paralelepípedo (un prisma) con 6 ladrillitos para la superficie de la base y 4 de altura.

¿Cuál es su volumen en "ladrillitos"? .... ¿Cuál es el área de cada cara lateral del prisma? ....

¿Tienen igual área que la base? ....

Si partís el prisma por la mitad, ¿qué dimensiones cambian? ......

Su volumen ¿se reduce a la mitad? ....

Si volvés a partirlo a la mitad ¿cómo es el volumen con respecto al prisma original? ....

Si mantenemos la misma altura y duplicamos la cantidad de ladrillitos en el área de la base, el volumen ¿se duplica? ....

Si mantenemos igual altura y el mismo ancho, pero duplicamos sólo el largo ¿qué sucede con el volumen? ....

Si el prisma original con los 24 ladrillitos hubiese sido construido con 24 ladrillos de verdad ¿cambia su volumen? .... ¿por qué? .. ..

La unidad de medida para el cálculo del volumen de un cuerpo es el cubo. ¿Por qué? Porque tiene todas sus aristas iguales, sus diedros rectos, y cuenta con ancho, largo y profundidad. Y como de costumbre, la unidad de volumen será el cubo de 1 metro de arista, es decir el metro cúbico: $1m^3$

El metro cúbico: $1m^3$ es la unidad de medida del volumen

¿Pueden imaginar el tamaño del m^3? ¿Se atreven a construirlo?

¿Cuántas caras tiene el cubo? .... ¿Cómo son sus formas? .... ¿Qué área tienen las caras de un cubo de 1 m de arista? ....

Entonces, pueden compartir el metro cuadrado que construyeron en el apartado anterior y construir un m^3 ¡para todo el curso!

Con 6 m^2 de área formen 1 m^3 de volumen pegando las aristas con cinta plástica, pueden usar telgopor.

Grande ¿no? Como unidad de medida para cuerpos pequeños evidentemente será muy incómodo o no servirá. Debemos buscar otras más chicas, y como siempre la que sigue en tamaño será un cubo de 1 dm de arista, es decir el dm^3.

Utilizando tu intuición (fundamentada por supuesto, no al azar), calculá cuántos cubitos de 1 dm^3 se pueden colocar dentro de 1 m^3 .... ¿por qué? ....

Es decir: $1\ 000\ dm^3 = 1\ m^3$

Podemos seguir analizando y llegaremos a la siguiente conclusión:

$$1\ m^3$$

$$1\ dm^3 = \frac{1}{1.000}\ m^3 = 0{,}001\ m^3$$

$$1\ cm^3 = \frac{1}{1.000.000}\ m^3 = 0{,}000\ 001\ m^3$$

$$1\ mm^3 = \frac{1}{1.000.000.000}\ m^3 = 0{,}000\ 000\ 001\ m^3$$

Escribí ejemplos de la vida real que estimes en:

$1\ m^3$ ....

$1\ dm^3$ ....

$1\ cm^3$ ....

$1\ mm^3$ ....

De la misma manera podemos deducir:

$$1\ dam^3 = 1\ 000\ m^3$$
$$1\ hm^3 = 1\ 000\ 000\ m^3$$
$$1\ km^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$$

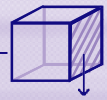
Escribí ejemplos de la vida real que estimes en:

$1\ dam^3$ . ...

$1\ hm^3$ . ...

Lo importante

En todo poliedro se resumen tres magnitudes diferentes:



arista: tiene longitud: m
cara: tiene área: m^2
cuerpo: tiene volumen: m^3
y capacidad: ℓ

Contá los ceros:

decímetro cúbico: $\frac{1}{10^3}\ m^3$

centímetro cúbico: $\frac{1}{100^3}\ m^3$

milímetro cúbico: $\frac{1}{1.000^3}\ m^3$

P33 Calculá:

¿cuántos m^3 son 300 dam^3? ....

¿cuántos m^3 son 28 hm^3? ....

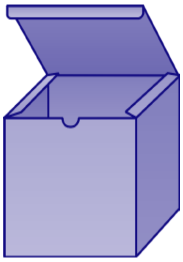
¿cuántos cm^3 son 136 m^3? ....

¿cuántos mm^3 son 25 cm^3? ....

¿cuántos km^3 son 720 m^3? ....

Recordá:
Interpretar gráficamente, permite razonar mejor.

P34 ¿Cuántos dados de 1 cm de arista formarán el volumen de una caja de 2 cm de ancho, 2 cm de largo y 4 cm de profundidad? (Colocá los datos en el dibujo)



¿Cuál es el área de una base de la caja?

¿Por cuál valor multiplicarías el área de la base para obtener el volumen?

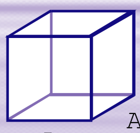
Es como superponer la base tantas veces como lo indica la profundidad, entonces:

$V = a_{BASE} \cdot prof$ y nos servirá de base para el cálculo de cualquier volumen

Para completar:
- ¿Qué forma tiene cada cara de la caja? ....
- ¿Cuál es el área de cada cara de la caja?

- ¿Cuál es el área total?

Recordá:



V = Largo . Ancho . Profundidad

P35 ¿Cuál es el volumen de un prisma rectangular de 2 cm de ancho, 3 cm de largo y 4 cm de alto?

P36 ¿Cuál será el volumen de un prisma de iguales dimensiones, pero con su base en forma de paralelogramo (o sea, un paralelepípedo)?

Capacidad

Por un rato hemos dejado de lado la capacidad, es decir la magnitud del interior, pero ¿no es lo mismo que el volumen? Algo de eso hay, no haremos muchas diferencias entre ellos, pero convengamos que en general la capacidad resulta más apropiada cuando se trata de líquidos o gaseosos, y el volumen para los sólidos. Aunque también se usa la capacidad para decir: "hay capacidad para 21 pasajeros sentados en el colectivo", "suben sólo 4 personas en un ascensor", o "la capacidad en granos de trigo que puede contener un silo."

•Escribí una argumentación para explicar la diferencia entre capacidad y volumen: ....

....

•Pero ya sabés, ¿cuál es la unidad para medir capacidades? ......

¿Qué relación tendrá entonces el m^3 con el litro?

Es difícil de ver, ¿podrías imaginar, mirando el m^3 construido, cuántos litros se deberían colocar para llenarlo? Muchos ¿no? ¡Cómo mil!
Sí, esa es la relación:

$$1000\ell = 1\ m^3$$

•Nombrá distintos envases que contengan:

1ℓ: ....

200 cm^3: ....

Pero entonces: a partir del litro (ℓ) como unidad de medida para la magnitud capacidad, se pueden formar unidades más chicas y más grandes, para utilizarlas según sea el objeto a medir. Por supuesto, manteniendo el sistema decimal:

1ℓ	
$1\ d\ell = \frac{1}{10}\ \ell$	$1\ da\ell = 10\ \ell$
$1\ c\ell = \frac{1}{100}\ \ell$	$1\ h\ell = 100\ \ell$
$1\ m\ell = \frac{1}{1.000}\ \ell$	$1\ k\ell = 1000\ \ell$

¿Con qué unidades medirías las capacidades de:

un camión de basura? ....

un medidor para jarabes medicinales? ....

una taza de té? ....

un tanque de nafta para autos? ....

Además, si:

$$1000\ell = 1\ k\ell = 1\ m^3$$
$$1\ell = 1\ dm^3$$
$$1m\ell = 1\ cm^3$$

Explicá el porqué de estas igualdades. ....

....

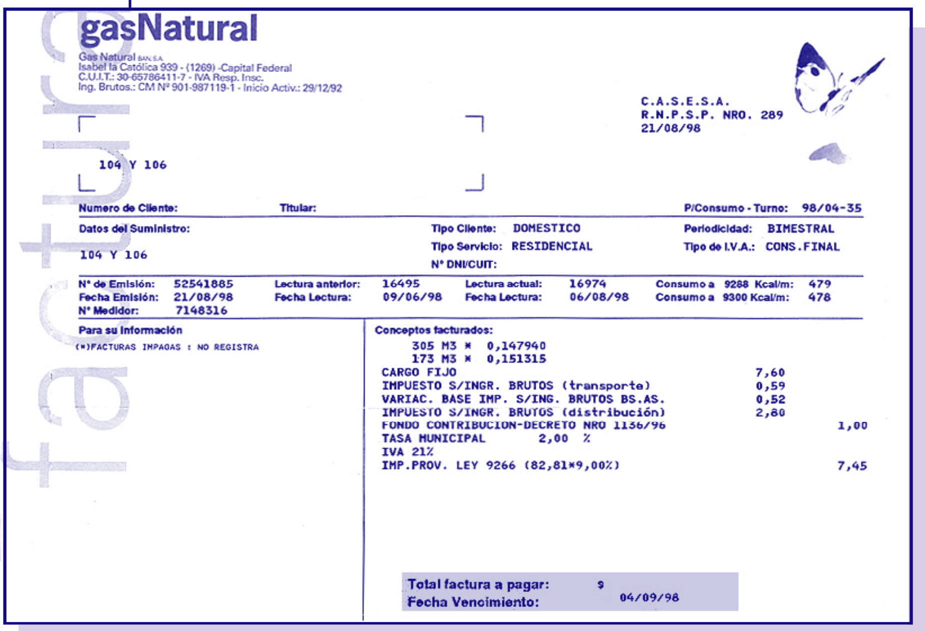
P 37 Últimamente lo más común es utilizar las unidades de volumen, aun para medir líquidos (sobre todo es el caso de los comestibles). Aproximadamente, ¿cuántos litros equivalen a:

970 cm^3 de cerveza .... 90 mℓ de medicina ....

500 cm^3 de vinagre .... 700 cm^3 de vino ....

1000 cm^3 de jugo ....

P 38 Nos tiraron la boleta para pagar el consumo de gas del último bimestre, pero ha caído algo de lluvia y se borraron algunos datos. ¡Qué problema! No sabemos cuánto hay que pagar. ¿Podés ayudarnos? Sabemos que el gas de consumo en el hogar se factura midiendo en m^3; entonces interpretá la boleta y completá los espacios en blanco.


gasNatural
Gas Natural BAN S.A.
Isabel la Católica 939 - (1269) -Capital Federal
C.U.I.T.: 30-65786411-7 - IVA Resp. Insc.
Ing. Brutos.: CM Nº 901-987119-1 - Inicio Activ.: 29/12/92

C.A.S.E.S.A.
R.N.P.S.P. NRO. 289
21/08/98

104 Y 106

Numero de Cliente: Titular: P/Consumo - Turno: 98/04-35

Datos del Suministro: Tipo Cliente: DOMESTICO Periodicidad: BIMESTRAL
104 Y 106 Tipo Servicio: RESIDENCIAL Tipo de I.V.A.: CONS.FINAL
Nº DNI/CUIT:

Nº de Emisión: 52541885 Lectura anterior: 16495 Lectura actual: 16974 Consumo a 9288 Kcal/m: 479
Fecha Emisión: 21/08/98 Fecha Lectura: 09/06/98 Fecha Lectura: 06/08/98 Consumo a 9300 Kcal/m: 478
Nº Medidor: 7148316

Para su Información
(*)FACTURAS IMPAGAS : NO REGISTRA

Conceptos facturados:

305 M3 * 0,147940		
173 M3 * 0,151315		
CARGO FIJO	7,60	
IMPUESTO S/INGR. BRUTOS (transporte)	0,59	
VARIAC. BASE IMP. S/ING. BRUTOS BS.AS.	0,52	
IMPUESTO S/INGR. BRUTOS (distribución)	2,80	
FONDO CONTRIBUCION-DECRETO NRO 1136/96		1,00
TASA MUNICIPAL 2,00 %		
IVA 21%		
IMP.PROV. LEY 9266 (82,81*9,00%)		7,45

Total factura a pagar: $
Fecha Vencimiento: 04/09/98

¿Cuántos metros cúbicos se consumieron en total?

¿Qué dimensiones (largo, ancho y alto) podría tener un recipiente para contener el volumen total?

P 39 ¿Tiene que ver el volumen con el peso?

¿Recordás cuando preguntamos que pesa más, si un kilo de plomo o un kilo de pluma? ¿Qué respondiste? ....

¿Cómo es entre sí el volumen de cada uno de ellos? ....

¿Cuál tiene mayor volumen? ....

Escribí ejemplos de elementos que tengan:

igual peso y distinto volumen

....

igual volumen y distinto peso

P40 Tenemos una botella de jugo de 1 litro y un cartón de tetrabrik, también de jugo, con la misma capacidad. ¿Cuál es más alto? ¿Por qué?

¿Cómo son sus volúmenes?

P41 En un tanque de 500 litros se colocan 25,8 dm^3 de nafta, luego 53679 cm^3 y más tarde 3,48 hℓ. Necesitamos saber cuántos litros faltan para llenar el tanque.

Como contamos con un bidón de 1 daℓ, estimá ¿cuántos bidones deberemos cargar para llenar el tanque?

P42 Una canilla arroja 729 dm^3 de agua por hora, otra 42450 cl cada media hora, y una tercera vierte 3 hℓ cada 20 minutos. ¿Cuántos litros se arrojan cada 2 horas?

Revisamos

Resolución de problemas

↓

INTERPRETACIÓN

↓

Organizamos la información → Datos / Incógnitas

RELACIONAMOS Y CONECTAMOS → Figuras y cuerpos:

- Triángulos:
  - Clasificación.
  - Propiedad triangular
- Cuadriláteros:
  - Clasificación.
- Polígonos:
  - Suma de los ángulos interiores:
  - $S = 180° \cdot (n - 2)$
- Medidas de:

Superficie: área, m^2

Volumen: m^3

Capacidad: ℓ

ESTIMAMOS LA SOLUCIÓN → Métodos de estimación en área y volumen

↓

RESOLUCIÓN → Cálculo de medida de ángulos de triángulos y de polígonos en general. Recuento de unidades en el cálculo de áreas, volúmenes y capacidades.

↓

AUTOEVALUACIÓN